Gleichungen Lösen

Band I

(Mathematik in der Oberstufe)

A u s z u g s w e i s e !

F. Rothe

“ Gleichungen Lösen, Band I “,
(Mathematik in der Oberstufe)
1. Auflage

- im Selbstverlag -

Vorwort

Seit jeher spielen Gleichungen in der Schulmathematik eine zentrale Rolle. Am häufigsten treten die sogenannten “**Gleichungen n-ten Grades**” auf. “Gleichungen Lösen, Band I” ist eine **umfassende Darstellung dieser Gleichungen zum lernen, zum schnellen wiederholen, zum ...**

Dabei liegt der Schwerpunkt auf dem **klassischen Lösen von Gleichungen** - mit Papier und Bleistift, wie es in der Schule am meisten verlangt wird. Es werden **Lösungsverfahren** entwickelt und **Rechenkniffe** gezeigt. Mit den vielen Aufgaben kommt die Sicherheit. Wenn das Lösen dann noch zügig von der Hand geht, **beginnt es Spaß zu machen...** Ein kurzer T**heorieteil dient dazu Übersicht** über die Welt der Gleichungen n-ten Grades zu gewinnen.

Wer “Gleichungen Lösen, Band I” durchgearbeitet hat, ist gut gewappnet für alle Gleichungen n-ten Grades in der Oberstufe.

“Gleichungen Lösen, Band I” enthält **Musteraufgaben** mit **umfangreiche Erklärungen, Zusammenfassungen, Übersichten** und **zahlreiche Aufgaben** auf **zwei verschiedenen Lernniveaus.**

Leider können sich auch Fehler einschleichen. Wer welche entdeckt möge sich bitte an mich wenden. Für weitere Anregungen und Verbesserungsvorschläge bin ich immer dankbar.

Frank Rothe, Samstr. 49 B, A-5023 Salzburg,
Tel=Fax: 0043/662/665643
e-mail: frank.rothe@utanet.at
homepage: frank.rothe.web.ag

Und nun **“Alles Gute und viel Erfolg” mit “Gleichungen Lösen, Band I”**

Frank Rothe

Mathematische Fähigkeiten verbinden mit...

Inhaltsverzeichnis

...mathematischem Verständnis !

So sind die Kapitel aufgebaut:

2.3 Das Ausklammern der Unbekannten

Eine Einführung mit...

Einführung. Das Ausklammern der Unbekannten (kurz: ... das Ausklammern) als Lösungsverfahren im Zusammenhang mit Gleichungen n-ten Grades fußt auf dem sogenannten Produkt-null-Satz (kurz: PNS). Dieser besagt: „Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer seiner Faktoren null ist.”

$$2 \quad 3 \quad 0 = 0$$
$$3 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 5 = 0$$
$$7 \quad 1111 \quad x \quad 0 = 0$$
$$5 \quad a \quad 0 \quad x \quad 10 = 0$$

Das Lösungsverfahren besteht nun darin die Gleichungen, die zumeist aus Summanden bestehen, geschickt in ein Produkt, welches den Wert Null hat, umzuformen. Dabei hilft das eigentliche Ausklammern der Unbekannten...

...vielen Beispielen und ausführlichen Erklärungen , ...

Beispiele:

a) $\overbrace{x^2}^{Summand} + \overbrace{7x}^{Summand} = 0$ | Ausklammern der Unbekannten

$\overbrace{\underbrace{x}_{Faktor} \underbrace{(x+7)}_{Faktor}}^{Produkt} \overbrace{=}^{ist} \overbrace{0}^{Null}$ | PNS

$x_1 = 0 \quad x + 7 = 0$ | -7 , Anm.: V steht für „oder".

$x_2 = -7$

Wenn die Unbekannte in jedem Summanden enthalten ist, läßt sich die Unbekannte auch ausklammern. Es handelt sich somit um eine **„Gleichung ohne konstanten Summanden"**. Durch das Ausklammern der Unbekannten ist automatisch Null eine Lösung der Gleichung.

b) $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$ | Ausklammern der Unbekannten

$\underbrace{x}_{Faktor} \underbrace{\left(x^2 - 4x - 12\right)}_{Faktor} = 0$ | PNS

$x_1 = 0 \quad x^2 - 4x - 12 = 0$ | Kurzmerkregel f. d. kleine Lösungsformel

$$_2x_3 = 2 \pm \sqrt{4+12}$$

$$_2x_3 = 2 \pm \sqrt{16}$$

$$_2x_3 = 2 \pm 4$$

$x_2 = 2 - 4$ bzw. $x_3 = 2 + 4$

$x_2 = -2$ $\quad x_3 = 6$

Die Gleichung besitzt die drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 6$

Das Ausklammern der Unbekannten ist immer verbunden mit anderen (Teil-) Lösungsverfahren, mit deren Hilfe man nach weiteren - d.h. neben Null - Lösungen der Gleichung sucht.

c) $x^3 = 5x$ | -5x

$x^3 - 5x = 0$ | Ausklammern

$x\left(x^2 - 5\right) = 0$ | PNS

$x_1 = 0 \quad x^2 - 5 = 0$ | +5

$x^2 = 5$ | $\pm\sqrt{}$

$$_1x_2 = \pm\sqrt{5}$$

Die Lösungen lauten $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{5}$, $x_3 = -\sqrt{5}$

Hier wurde das Umformen als weiteres Lösungsverfahren benötigt.

d) $$x^4 - 9x^2 = -8x^3 \quad | +8x^3$$

$$x^4 + 8x^3 - 9x^2 = 0 \quad | \text{ Ausklammern}$$

$$x\left(x^3 + 8x^2 - 9x\right) = 0 \quad | \text{ PNS}$$

$$x_1 = 0 \qquad x^3 + 8x^2 - 9x = 0$$

In der rechten Gleichung enthält immer noch jeder Summand die Unbekannte. Wir können sie nochmal ausklammern.

$$...x^3 + 8x^2 - 9x = 0 \quad | \text{ Ausklammern}$$

$$x\left(x^2 + 8x - 9\right) = 0 \quad | \text{ PNS}$$

$$x_2 = 0 \qquad x^2 + 8x - 9 = 0 \quad | \text{ Kurzmerkregel f. d. kl. Lösungsformel}$$

$$_3x_4 = -4 \pm \sqrt{16+9}$$

$$_3x_4 = -4 \pm \sqrt{25}$$

$$_3x_4 = -4 \pm 5$$

$$x_3 = -4 + 5 \quad \text{bzw.} \quad x_4 = -4 - 5$$

$$x_3 = 1 \qquad\qquad x_4 = -9$$

Die Gleichung besitzt die Lösungen: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -9$. Null ist eine Doppellösung. Wir konnten bei dieser Aufgabe die Unbekannte mehrmals ausklammern. Das Ausklammern glückte insgesamt 2-mal, da die kleinste Hochzahl der Unbekannten, wenn wir alle Summanden berücksichtigen, die 2 war. Natürlich hätten wir auch direkt x^2 ausklammern können. Dann hätte die Rechnung (ausführlich) so ausgesehen:

$$x^4 + 8x^3 - 9x^2 = 0 \quad | \text{ Ausklammern}$$

$$x^2\left(x^2 + 8x - 9\right) = 0 \quad | \text{ PNS}$$

$$x^2 = 0 \qquad \text{V} \qquad x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x \; x = 0 \quad | \text{ PNS} \qquad\qquad ...$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \qquad\qquad x_3 = 1 ... bzw ... x_4 = -9$$

Das sind wieder zusammen die Lösungen: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -9$

Frage: Wenn eine Gleichung ohne konstanten Summanden vorliegt (d.h. jeder Summand enthält die Unbekannte) und wenn die kleinste vorkommende Hochzahl der Unbekannten die 3 ist, dann ist Null keine Doppellösung sondern eine ... ?

... der übersichtlichen Zusammenfassung der wesentlichen Inhalte , ...

Zusammenfassung:

1. Das **Ausklammern der Unbekannten** als Lösungsverfahren kommt zum Zuge, wenn jeder Summand der Gleichung die Unbekannte enthält m.a.W. wenn es in der Gleichung keinen konstanten Summanden gibt. Solche Gleichungen können wir **„Gleichungen ohne konstanten Summanden “** [1] nennen. Durch das Ausklammern der Unbekannten lautet eine Lösung der Gleichung immer Null.

2. Ein **mehrfaches Ausklammern** ist manchmal möglich. Dann ist Null eine „Mehrfachlösung”.

3. Das Ausklammern tritt stets im Verein **mit anderen Lösungsverfahren auf.**

4. Als **Lösungsschritte** des Ausklammerns können gelten:
1. Schritt: Bringe die Gleichung auf Normalform.
2. Schritt: Klammere die Unbekannte aus. Null ist eine Lösung. Wenn sich Null nochmals ausklammern läßt, so tue es, bis es nicht mehr geht.
3. Schritt: Suche mit anderen Lösungsverfahren nach weiteren Lösungen

[1] Gleichungen ohne konstanten Summanden werden auch als „homogene Gleichungen” bezeichnet.

... dem Aufgabenteil mit ...

... den grundlegenden, einfacheren Aufgaben für alle und ...

Aufgaben:

Grundlegende Aufgaben

1. Berechne die Unbekannte unter Zuhilfenahme des Ausklammerns. Wenn du fertig ausgeklammert hast, überlege mit welchem Verfahren es weiter geht. Rechne zu ende.

a)	$x^2 - 10x = 0$	b)	$x^2 + 5{,}5x = 0$	c)	$2x^2 = -10x$
d)	$x^3 - 16x = 0$	e)	$0 = x^3 + 13x^2$	f)	$x^3 - 2x^2 = 48x$
g)	$10x^2 = -2x^3 - 12x$	h)	$5\left(x^3 + 10x^2\right) = 55x$		
i)	$3 + x^4 + 5x^3 = 3$	j)	$100\left(x^5 - 5x^2\right) = 12x^2$		

Tip.: Nicht verzagen...erst mal die Normalform aufschreiben. Dann wird es einfacher.

2. Ermittle - soweit wie möglich - die Unbekannte x. Anm.: Löse ohne Rücksicht auf evtl. Fallunterscheidungen oder die Definitionsmenge.

a)	$3x^2 - 3ax = 0$	b)	$ax^2 = 4x$	c)	$3x^3 = ax$
d)	$ax^3 + x^3 - a^2x = x^3$	e)	$x^3 - 4ax^2 + 3a^2x = 0$		

3. Überlege wie du die Gleichungen lösen <u>würdest</u>. Begründe (Grad, , Lösungsverfahren, Gleichungstyp)!

a)	$3x^2 - 4 = 11x$	b)	$3x^2 = 11x$	c)	$3x^2 = 11$
d)	$x^7 - 7x = 7x^7$	e)	$4x^2 - x^2 = 10 - 2x^2$		
f)	$4 - 3x^2 + 2x = 9x^2$	g)	$x\left(x - x^2\right) = -2x$		

... vertiefenden, anspruchsvolleren Aufgaben für diejenigen, die mehr brauchen. Und zum Abschluß die ...

Vertiefende Aufgaben

4. Löse die Gleichungen!

a) $\frac{1}{2}x^3 = \frac{2}{3}x^2$

b) $x\left(x^2 - \frac{1}{25}\right) = \frac{3}{25}x$

c) $\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{27}x = -\frac{2}{9}x^2$

d) $2x\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x\left(x + 6x^2\right)$

e) $\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-1) = x^2\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}$

f) $\frac{3}{2}x^4 + \frac{4}{343}x = \left(x^2\right)^2$

5. Löse - soweit wie möglich - nach der Unbekannten x auf (... wieder keine Fallunterscheidungen etc.). An einigen Stellen kann durch teilweises Radizieren vereinfacht werden.

a) $ax\,(x-a) = x^3 - ax^2$

b) $(a+1)x^3 - 4a^2x = x^3$

c) $x^3 + (5-a)\,x^2 - 5ax = 0$

Tip.: Faktorisiere mit den binomischen Lehrsätzen z.B. $a^2 + 12a + 36 = (a+6)^2$

d) $x^3 + 49x = 14x^2 + \frac{4}{a}x$

Beachte: a steht für eine konstante Zahl. Gehört es dann zu p oder zu q ?

e) $x^4 + a^2x^2 = a\left(2x^3 + \frac{x^2}{9}\right)$

6. Gemischte Aufgaben zu den ersten drei Lösungsverfahren: Löse die Gleichungen!

a) $5x^2 - 36 = x^2$

b) $\frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 = -x^2$

c) $2x^2 + 3x = \frac{15}{2} + x$

d) $x^4\left(x + \frac{5}{9}\right) + \frac{4}{81}x^3 = x^4$

e) $7x\left(x - \frac{10}{7}\right) = 8$

Tip: Muß die Gleichung evtl. erst noch auf eine bestimmte Form (z.B. die der normierten quad. Gleichung) gebracht werden? Manchmal muß man auch erst etwas umformen, um genau entscheiden zu können, welches Lösungsverfahren zum Ziel führt.

... Lösungen zur eigenen Kontrolle !

Lösungen zu „Das Ausklammern”

1. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ b) $x_1 = 0$, $x_2 = -5{,}5$ c) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$ d) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -4$ e) ${}_1x_2 = 0$, $x_3 = -13$ f) $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = -6$ g) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$ h) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -11$ i) $x_{1,2,3} = 0$, $x_4 = -5$ j) ${}_1x_2 = 0$, $x_3 = 8$

2. a) $x_1 = 0$, $x_2 = a$ b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{a}$ c) $x_1 = 0$, ${}_2x_3 = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ d) $x_1 = 0$, ${}_2x_3 = \pm\sqrt{a}$ e) $x_1 = 0$, $x_2 = 3a$, $x_3 = a$

3. a) Grad 2, gr. (oder kl.) Lsg.formel, (allg..) quad. Gleichung b) Grad 2, Ausklammern, Gleichung ohne konstanten Summanden c) Grad 2, Umformen, reine Gleichung d) Grad 7, Ausklammern, Gleichung ohne konstanten Summanden e) Grad 2, Umformen, reine Gleichung f) Grad 2, gr. (oder kl.) Lsg.formel, (allg.) quad. Gleichung g) Grad 3, Ausklammern, Gleichung ohne konstanten Summanden

4. a) $x_{1,2} = 0$, $x_3 = \frac{4}{3}$ b) $x_1 = 0$, ${}_2x_3 = \pm\frac{2}{5}$ c) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = -\frac{2}{9}$ d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{9}{4}$ e) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{3}$ f) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{2}{7}$

5. $x_1 = 0$, ${}_2x_3 = a$ b) $x_1 = 0$, ${}_2x_3 = \pm 2\sqrt{a}$ c) $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $x_3 = -5$ d) $x_1 = 0$, $x_2 = 7 + \frac{2}{\sqrt{a}}$, $x_3 = 7 - \frac{2}{\sqrt{a}}$ e) $x_1 = 0$, $x_2 = a^2 + \frac{\sqrt{a}}{3}$, $x_3 = a^2 - \frac{\sqrt{a}}{3}$

6. a) ${}_1x_2 = \pm 3$ b) ${}_1x_2 = 0$, $x_3 = \frac{2}{7}$ c) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$ d) $x_{1,2,3} = 0$, $x_{4,5} = \frac{2}{9}$ e) $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{4}{7}$

Weitere Aufgaben...
... zum Umformen!

Aufgaben:

Grundlegende Aufgaben:

7. Berechne die Unbekannte x.

a) $\frac{x}{3} = 7$ b) $\frac{2x}{5} = 4$ c) $7x + 3 = -11$

d) $10 - 3x = 7$ e) $x^2 - 5 = 20$ f) $x^3 = -125$

g) $3x^4 + 2 = 3890$ h) $4x^2 + 6 = -2x^2 + 4 + 8x^2$

i) $6x - 3 = 2x + 13$ j) $2x + 7 + 5x = 10 + 10x + 3$

k) $3 \cdot (x - 2) = x + 4$ l) $7 - 5 \cdot (1 + x) = 23 + 2x$

m) $\frac{x}{2} + 11 = 4 - 4 \cdot (7 - x) - 1 + x$ Anm.: $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x = 0{,}5x$

n) $x^5 = 243$ o) $-6x^2 = 864$

8. In den folgenden Aufgaben ist jeweils x die Unbekannte. Löse (ohne Berücksichtigung der Definitionsmenge und von Fallunterscheidungen) die Gleichungen.

a) $3x + 7 = a - 4$ b) $3a - 4 + 2x = a - 4x + 13$

c) 11x+2=ax-2 d) $bx^2 + 3 + 6x^2 = x^2 + 4$

e) $16 + a(x - 2) = 4x + 3a - 5$ f) $\frac{x^2}{4} + 2a + 6 = 3 - 2(a - x^2) + ax^2$

9. Die Formeln sind jeweils nach den gefragten Unbekannten umzuformen.

a) $u = 2r\pi$ r=? b) $A = r^2 \cdot \pi$ r=?

c) $A = \frac{g \cdot h}{2}$ g=? h=? d) $V = a^2 \cdot h$ h=? a=?

e) $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ h=? r=? f) $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$ h=? r=?

g) $O = a \cdot b + 2\frac{a \cdot h_a}{2} + 2\frac{b \cdot h_b}{2}$ a=? b=? $h_a = ?$ $h_b = ?$

h) $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$ a=? c=? h=?

Vertiefende Aufgaben:

...

Aufgaben:

Noch mehr Aufgaben...
... zum Abspalten von Linearfaktoren !

Grundlegende Aufgaben

...

Vertiefende Aufgaben

10. Löse die Aufgaben mit Hilfe des Abspaltens von Linearfaktoren

a) $\left(x^2-109\right)x+110=2x^2$ b) $x^3+\left(x+2\right)\left(x+6\right)=-9x^2+76$

c) $x^3+\frac{3}{2}x^2=\frac{1}{2}$ d) $x^3-5x^2-7x+35=0$

e) $x\left(x^2-x-\frac{16}{9}\right)=\frac{4}{9}$ f) $\left(x^2-4\right)x^2+2x^3=5\left(2x+1\right)$

g) $2x\left(\frac{1}{2}x^3-4\right)=X^3-8$

11. Eine Lösung ist bekannt. Berechne die Übrigen!

a) $x_1=-\frac{1}{2}$; $2x^3-2x^2-\frac{7}{2}x-1=0$

b) $x_1=-\frac{2}{5}$; $x^3+\frac{2}{125}-\frac{3}{25}x=0$

*c) $x_1=\sqrt{5}$; $x^3-3x^2-5x+15=0$

12. Überprüfe ob die angegebene Lösung stimmt und berechne die übrigen Lösungen (... ohne Fallunterscheidungen etc.)

a) $x_1=1$; $x^3+\left(2+a\right)x^2+\left(2a-3\right)x-3a=0$ Tip: Bin. Formel

b) $x_1=a$; $x^3-\left(11+a\right)x^2+\left(28+11a\right)x-28a=0$

c) $x_1=-a$; $x^3+x^2-a^2x-a^2=0$

13. Löse durch Abspalten von Linearfaktoren. Die weiteren Lösungen gehen nicht glatt auf (d.h. sie sind keine rationalen Zahlen) können aber zuweilen durch teilweises Radizieren vereinfacht werden!

a) $x^3=8\left(x+1\right)$ b) $x^2\left(x+5\right)=12$ c) $\left(x^2+13\right)x^2+2=7x^3+9x$

14. Gemischte Aufgaben zu den ersten fünf Lösungsverfahren! Löse!

a) $\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{27}x^2=0$ b) $\frac{1}{3}x^4-27=0$

c) $x^4+x^3-216x=216$ d) $\left(x+2\right)^2+\left(2x-3\right)^2=x+9$

*e) $x^4=x\left(3x+2\right)$ f) $0=x\left(3x+2\right)$

Tip: Muß die Gleichung evtl. erst noch auf eine bestimmte Form (z.B. die der normierten quad. Gleichung) gebracht werden? Manchmal muß man auch erst etwas umformen, um genau entscheiden zu können, welches Lösungsverfahren zum Ziel führt.

3. Übersicht zu den Lösungsverfahren für Gleichungen n-ten Grades

Die folgende Zusammenstellung gibt nocheinmal überblickend eine Antwort auf die Frage: Wann kann ich welches Lösungsverfahren am günstigsten (zuerst) anwenden? Dabei sind die Lösungsverfahren des Produkt-null-Satzes und der Bi-quadratischen Gleichungen bewußt kleiner dargestellt. Sie kommen in der Schulmathematik nicht **so** häufig vor.

Übersichten fördern strukturiertes Lernen!

Wann kann man welches Lösungsverfahren sinnvoll (zuerst) anwenden?

Lösungsverfahren	Beispiele typische	Beispiele weitere
1.Das Umformen... ...kommt zum Zuge, wenn die Gleichungen die Unbekannte nur mit einem Exponenten enthält (reine Gleichungen).	$x^2 - 25 = 0$ $x^4 = 64$	$3\ (x-4) = 3 - x$ $3x^5 - 4 = 6 - x^5$
2. Die kleine Lösungsformel.. ...tritt in Kraft bei allen allgemeinen quadratischen Gleichungen.	$x^2 + 4x - 10 = 0$ $6x^2 - 3x + 4 = 0$	$13x^2 - 4 = 8x$ $x^2 + 4 = x^2 + 3x$
3. Das Ausklammern... ...kann man anwenden, wenn alle Summanden in der Gleichung die Unbekannte enthalten bzw. wenn die Gleichung keinen konstanten Summanden hat (Gleichung ohne konstanten Summanden). Weitere Lösungen sind anschließend mit anderen Lösungsverfahren zu bestimmen.	$x^2 + 6x = 0$ $4x^3 + 6x = 0$	$x^3 = 4x^2$ $6x^7 - x^5 = 4x^7$
4 Der Produkt-Null-Satz... ...ist zuerst am Platze, wenn die Gleichung die Gestalt eines Produktes mit dem Wert Null hat (Gleichung als Produkt). Die einzelnen Lösungen sind dann im weiteren mit anderen Lösungsverfahren zu ermitteln.	$(x-2)\ (x+3) = 0$ $x\ (x+4) = 0$ $5x\ (x^2 - 4) = 0$ $(x^3 + 6x)\ x\ (x+5)^3 = 0$	
5. Das Abspalten... ...kommt dann in Frage, wenn die übrigen Lösungsverfahren nicht mehr greifen. Zudem muß die Gleichung - im Rahmen der Schulmathematik - mind. eine ganzzahlige Lösung aufweisen. Man beginnt dabei mit dem gezielten Ausprobieren. Weitere Lösungen sind nachher mit anderen Lösungsverfahren zu suchen.	$x^3 - 4x^2 + 6 = 0$ $4x^3 + 9x^2 - 11x - 6 = 0$ $x^4 + 2x^3 + 2x - 4 = 0$	
6. Die Bi-quadratischen Gleichungen... ...sind bei der speziellen Gleichungsform alleine bestehend aus den Summanden mit den Exponenten 4 und 2 sowie dem konstanten Summanden gefragt.	$x^4 + 6x^2 - 11 = 0$ $6x^4 - 4x^2 + 4 = 0$	$x^4 - 8 = 6x^4 + 3x^2$

Anm.:Oftmals läßt sich nicht auf den ersten Blick entscheiden, welches Lösungsverfahren zunächst anzuwenden ist. Dies zeigt sich dann erst, wenn man durch Umformen die Gleichung auf ihre Normalform gebracht hat.

Mathematische Verständnis entwickeln durch ...

II. Gleichungen verstehen (theoretische Hintergründe beim Lösen von Gleichungen)

1. Von der Anzahl der Lösungen

Einführung. Bei den bisherigen Aufgaben haben wir immer die konkreten Lösungen der jeweiligen Gleichungen berechnet. Jetzt soll es darum gehen, wieviele Lösungen eine Gleichung n-ten Grades prinzipiell haben kann. Gibt es hierbei Regelmäßigkeiten? Wovon hängen diese gegebenenfalls ab?

Wesentliche Gesetzmäßigkeiten zu diesem Fragengebiet sind nachfolgend aufgelistet.

Als Zuckerl für alle diejenigen, die sich mit Komplexen Zahlen auskennen sind die aufgeführten Gesetzmäßigkeiten - jeweils unmittelbar anschließend - nochmals über der Grundmenge C der Komplexen Zahlen formuliert. Durch die Komplexen Zahlen lassen sich viele Gesetzte vereinfacht und dabei umfassender beschreiben. Zudem entsteht eine gewisse Eleganz in der Darstellung dieser mathematischen Inhalte. Wer von Komplexen Zahlen noch nie etwas gehört hat, überspringt diese Teile einfach.

...

...klare Fragestellung!

b) Wieviele Lösungen muß eine Gleichung n-ten Grades mindestens aufweisen? Achte darauf, ob der Grad eine gerade oder eine ungerade Zahl ist!

... mitdenken!
"Wer sieht es ?"

Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$	hat die Lösung.	Grad	Anzahl d. Lsg.
$x^3 - 8 = 0$	$x_1 = 2$	3	1
$x - 4 = 0$	$x_1 = 4$	1	1
$x^5 - 16x = 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = 2$ $x_3 = -2$	5	3
$x^2 + 4 = 0$	keine	2	0
$2x^2 - 16x = 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = 8$	2	2
$x^4 + x^2 - 20 = 0$	$x_1 = 2$ $x_2 = -2$	4	2

Die Antwort zum behalten !

Merke:
Ist der Grad einer Gleichung n-ten Grades

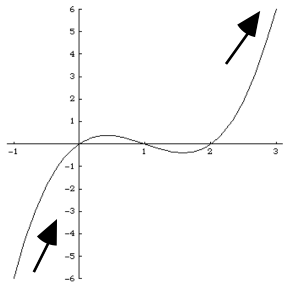
a) ungerade, so besitzt die Gleichung immer mindestens eine Lösung,
b) gerade, muß die Gleichung keine Lösung haben.

...

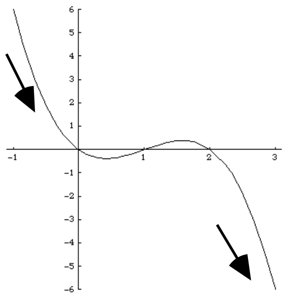
Das grafische Veranschaulichen der mathematischan Zusammenhänge zum tiefgreifenderen Einprägen der Inhalte ! "So kann man die Sache auch betrachten!"

Diesen Zusammenhang können wir uns mit Hilfe des grafischen Lösungsverfahren veranschaulichen (vgl. „Das grafische Lösungsverfahren”).

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$



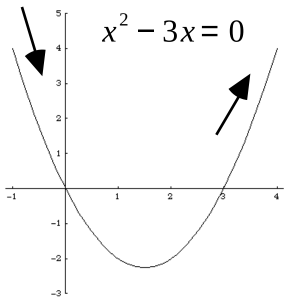
$-x^3 + 3x^2 - 2x = 0$

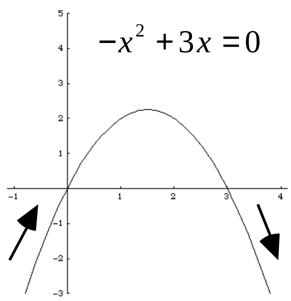


Der Graf (=Kurve) einer Gleichung (bzw. Funktion) ungeraden Grades wie z. B. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ oder $-x^3 + 3x^2 - 2x = 0$ kommt von links unten und geht nach rechts oben oder kommt von links oben und verläuft nach rechts unten. Dabei kreuzt der Graf zwangsläufig die x-Achse. Es gibt (mindestens) einen Schnittpunkt und somit immer (mindestens) eine Lösung der Gleichung.

Hingegen „verschwinden” die Grafen von von Gleichungen geraden Gerades wie z.B. $x^2 - 3x = 0$ oder $-x^2 + 3x = 0$ immer in dieselbe Richtung (nach oben oder unten) aus der sie gekommen sind. Eine Kreuzung mit der x-Achse findet nicht zwingend statt.

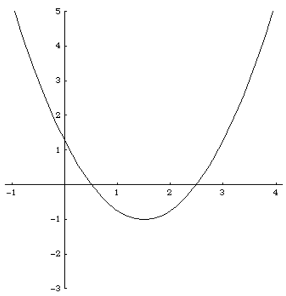
...



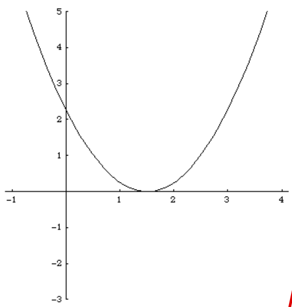


Geometrie und Algebra im Wechselspiel bilden eine sinnerfüllte Einheit !

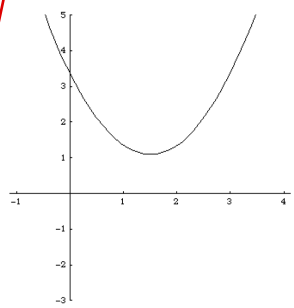
Verschiedene Fälle sind denkbar. Schnittpunkte des Grafen mit der x-Achse stehen dabei in direktem Zusammenhang mit der Anzahl der Lösungen (vgl. die Diskriminante), wie das Beispiel der quadratischen Gleichungen zeigt.



2 (Schnitt-)Punkte
=
2 (einfache) Lösungen



1 (Berühr-) Punkt
=
1 (Doppel-) Lösung



keine (gemeinsamen)Punk
=
keine (reellen) Lösunge

Mit Ausblick für den der weiter schaut ...

Mit den Komplexen Zahlen als Grundmenge hieße das...

Merke:
Jede Gleichung n-ten Grades weist - über der Grundmenge $G = C$ - immer mindestens eine Lösung auf.

Auch Verständnis erfordert wieder Überblick und ...

Zusammenfassung:

1. Der **Grad einer Gleichung n-ten Grades** gibt die maximal mögliche Anzahl von Lösungen dieser Gleichung an. Mehrfache Lösungen sind auch mehrfach zu zählen (Fundamentalsatz der Algebra im Reellen). Kurz:

$$Grad \geq Anzahl\ der Lösungen$$

2. Ist der **Grad einer Gleichung n-ten Grades**

a) **ungerade**, so besitzt die Gleichung immer mindestens eine Lösung,

b) **gerade**, muß die Gleichung keine Lösung haben.

3. Ist der Grad einer **reinen Gleichung** $a_n x^n + a_0 = 0$

a) **ungerade**, so besitzt die Gleichung genau eine (reelle) Lösung,

b) **gerade**, dann hat die Gleichung

entweder

genau zwei (reelle) Lösungen, die sich zudem nur in ihrem Vorzeichen unterscheiden

oder

überhaupt keine (reellen) Lösungen.

4. Jede **lineare Gleichung** $a_1 x + a_0 = 0$ besitzt immer genau eine Lösung. Ferner gilt:

$$Grad = Anzahl\ der\ Lösungen$$

5. Bei einer **quadratischen Gleichung**

$x^2 + px + q = 0$ bzw. $ax^2 + bx + c = 0$

bestimmt der Wert der **Diskriminante** Δ

$\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bzw. $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$

die Anzahl der Lösungen.

$\Delta > 0$	(also positiv)	zwei Lösungen
$\Delta = 0$		eine (Doppel-) Lösung
$\Delta < 0$	(also negativ)	keine Lösung

... Übung und ...

Aufgaben zur Anzahl der Lösungen:

Grundlegende Aufgaben

15. Wieviel Lösungen kann die Gleichung maximal haben? Wieviele Lösungen muß sie mindestens aufweisen. Achte auf den Grad! Löse anschließend die Aufgaben.

a)	$x^3 - 6x^2 + 10x = 0$	b)	$x\left(x^2 - \frac{49}{121}\right) = 0$
c)	$2x^4 + 14x^2 = 0$	d)	$3x^5 + 18 = 0$
*e)	$x^2\left(x^4 + 1 - \frac{4}{x}\right) = (x+1)(x-5)$	f)	$-x\left(5 - 2x^2 - x\right) = -2$

16. Berechne die Diskriminante. Wieviel Lösungen **müßten** die Gleichungen somit haben?

a)	$x^2 + 6x + 3 = 0$	b)	$x^2 - 5x + 6 = 0$	c)	$x^2 + 8x - 22 = 0$
d)	$x^2 + 25x = 10x$	*e)	$-x^2 + 3x + 2 = 0$	f)	$13x + 43 = -x^2$
g)	$2x^2 + 7x + 1 = 0$	h)	$3x^2 - 6x - 2 = 0$	i)	$-7x^2 + 4x - 3 = 0$
j)	$4\left(x^2 + 2x\right) = -4$	k)	$-6x + 5x^2 + 2 = 0$	l)	$-2\left(3x^2 - 1\right) = -7x$

...

... Übung !

Vertiefende Aufgaben

17. Maximale Anzahl der Lösungen? Mindestanzahl?. Achte auf den Grad! Löse !.

a) $x\left(\frac{1}{3}x^3+1+\frac{13}{16}x\right)=\frac{25}{12}+x$ b) $\left(x^3-1\right)^2=2\left(9-x^3\right)$

c) $x^3-\frac{6}{\sqrt{5}}x^2+x=0$ d) $x^4+\frac{175}{64}x^2-\frac{49}{32}x=\frac{1}{4}x^3$

Lösung mit rationalem Nenner!

*e) $\left(3x^8-21x\right)^2=0$ f) $-x^4\left(x+\sqrt{6}\right)-\sqrt{6}\left(x+\sqrt{6}\right)=0$

Tip: $x_1=-\sqrt{6}$! Rechne wie üblich oder Ausklammern! Wer sieht es?

18. Wie groß müssen a, b bzw. c sein, damit die Gleichung $ax^2+bx+c=0$ a) genau eine, b) keine oder c) zwei Lösungen besitzt. Gib jeweils eine Beispielgleichung an!

a) $x^2+6x+c=0$ *b) $2x^2+bx+50=0$ **c) $x^2+bx-36=0$

19. Wie groß muß c sein, damit die Gleichung $\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x+c=0$ genau eine Lösung hat? Wie lautet diese Gleichung? Löse sie!

20. Wie groß muß b sein, damit die Gleichung $x^3+bx^2+\frac{1}{9}x=0$ genau die Lösung $x_1=0$ und eine Doppellösung hat? Dabei soll b eine negative Zahl sein. Wie lautet diese Gleichung? Löse sie!

21. Eine quadratische Gleichung kann a) zwei Lösungen b) eine (Doppel-) Lösung oder c) keine Lösung besitzen. Beschreibe in der gleichen Weise wieviel Lösungen eine bi-quadratische Gleichung haben kann.