

# Formeln & Variablen – Vom numerischen zum Algebraischen Rechnen

(von Frank Rothe)

## „Das Drehbuch“ zur mathematischen Situation & Rahmen im Unterricht:

Algebraische Rechnungen als Formel lassen sich geschickt als das Gemeinsame von mehreren numerischen Rechnungen entwickeln. Das ist so zu verstehen<sup>1</sup>:

Beispiele:

$$12 \cdot 14 = (10 + 2) \cdot (10 + 4) = 100 + 40 + 20 + 8 = 168$$

$$22 \cdot 24 = (20 + 2) \cdot (20 + 4) = 400 + 80 + 40 + 8 = 528$$

$$32 \cdot 34 = (30 + 2) \cdot (30 + 4) = 900 + 120 + 60 + 8 = 1088$$

$$42 \cdot 44 = (40 + 2) \cdot (40 + 4) = 1600 + 160 + 80 + 8 = 1848$$

gemeinsame Form-el (aller Beispiele)

$$(a + 2) \cdot (a + 4) = \underbrace{a^2 + 4a + 2a + 8}_{\text{Teilresultate}} = \underbrace{a^2 + 6a + 8}_{\text{Schlussresultat}}$$

Obgleich die Zahlen in den unterschiedlichen Beispielen sehr verschieden sind, sind sie ihrer inneren mathematischen Bedeutung und ihrer Form nach gleich (Quadratzahl, Zahl der 40iger Reihe, Zahl der 20iger Reihe, 8). Die einzelnen Ergebnisse sind verschieden, der Rechengang ist seiner mathematischen Bedeutung nach (in allen Beispielen) gleich. Diese gemeinsame Form drückt man in einer so genannten Form-el aus. Der Weg wird ausgehend **von den konkreten Rechenbeispielen zur gemeinsamen Formel** (dem gemeinsamen Rechenprozess) beschrritten.

Dabei treffen die Schüler:innen zum ersten Mal auf das Symbol „a“ in der Mathematik – und nicht mehr im Zusammenhang mit der Sprache. Das Zeichen „a“ steht bei diesen Aufgaben zunächst für eine beliebige Zehnerzahl, da die Form-el das Gemeinsame im Rechengang aller Beispiele mit den verschiedenen Zehnerzahlen - der 10, 20, 30 usw. – ausdrückt. Die erste Begegnung mit einer Variablen, einer „allgemeinen Zahl“ erfolgt in der konkreten und anschaulichen Bedeutung einer **„Zahl aus der Zehnerreihe“**. Für die Schüler:innen erhebt sich die Frage: Kann das Symbol „a“ auch für andere Zahlen stehen?<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Vgl. Bernhard, A.: Algebra, Kapitel 1 und Rothe, F.: Algebra I, ab S. 6 (B) bzw. S 42 (C)

<sup>2</sup> Vgl. „Übungen 4“ in Rothe, F.: Algebra I, Ausg. B, S. 6

Der umgekehrte Weg führt **von der gemeinsamen Formel zu den konkreten Beispielen**. Für „a“ werden unterschiedliche Zahlen **in die Formel eingesetzt** und deren Ergebnisse überprüft, ob sie bei beiden Rechenwegen zum gleichen Ergebnis führen.

Überprüfe die Formel  $(a + 3) \cdot (a + 7) = a^2 + 10a + 21$  durch Einsetzen der angegebenen Zahlen für a.

a	$(a + 3) \cdot (a + 7) =$	$a^2 + 10a + 21 =$
1	$(1 + 3) \cdot (1 + 7) = 4 \cdot 8 = \mathbf{32}$	$1^2 + 10 \cdot 1 + 21 = 1 + 10 + 21 = \mathbf{32}$
2	$(2 + 3) \cdot (2 + 7) = 5 \cdot 9 = 45$	$2^2 + 10 \cdot 2 + 21 = 4 + 20 + 21 = 45$
3	$(3 + 3) \cdot (3 + 7) = 6 \cdot 10 = 60$	$9 + 30 + 21 = 60$
4	$(4 + 3) \cdot (4 + 7) = 7 \cdot 11 = 77$	$16 + 40 + 21 = 77$
5	$(5 + 3) \cdot (5 + 7) = 8 \cdot 12 = 96$	$25 + 50 + 21 = 96$

In dieser Vorgehensweise spiegelt sich der Aspekt der Ergebnisgleichheit beim algebraischen Rechnen. Dem „a“ in seiner Bedeutung werden dabei sämtliche Türen und Tore geöffnet: für im Prinzip alle Zahlen – solange nur die Ergebnisse gleichbleiben<sup>3</sup>.

Für die Schüler:innen ist das Einsetzen selbst ein wichtiger neuer Verständnisschritt. Zugleich wird das „a“ als Begriff einer Variable in seiner Bedeutung ungeheuer geweitet. Das alles auf einmal fällt nicht allen Schülern:innen leicht. Zum Teil wird das Ablösen von der 10er-Zahl-Bedeutung von a bereits in der unteren Hälfte von „Übungen 4“ vorbereitet. Manchen Schüler:innen reicht das nicht.

## „Die Aufführung“ zu Übungen 4A

Anknüpfend an das oben beschriebene ist es eine **gute Zwischenstufe** die Aufgabe in der Weise umgekehrt zu gehen, dass man die **gemeinsame Formel vorgibt** und nach **möglichen konkreten Beispielen fragt**. Natürlich sind dabei immer unterschiedliche Rechenbeispiele passend. Durch die sich anschließende Rechnung, wie zuvor in Übungen 4, erarbeiten und kontrollieren die Schüler:innen nun, ob ihr selbst ausgedachtes Rechenbeispiel tatsächlich den gleichen Rechengang aufweist wie die Formel. Die Schüler:innen konkretisieren die gemeinsame Formel in einzelnen Beispielen. Dies schafft Sicherheit im Wechselspiel von konkreten und allgemeinem Rechengang.

Der Übergang vom Auffinden einer gemeinsamen Formel aus konkreten Beispielen zum Einsetzen für a wird verständlicher. Denn im Prinzip ist dies bereits ein Einsetzen für a wie in Übungen 5. Aber es ist noch viel näher an der ursprünglich erarbeiteten Frage.

<sup>3</sup> Vgl. „Übungen 5“ in Rothe, F.: Algebra I, Ausg. B, S. 7

# Formeln: Vom numerischen zum algebraischen Rechnen

## Übungen 4 A

4. Hier siehst du die (gemeinsame) Formel. Welche Beispiele könnten oben gestanden haben? Rechne fertig.

a) Beispiele:

$$\bullet = ( \quad ) \cdot ( \quad ) = \quad + \quad + \quad + \quad =$$

$$\bullet =$$

$$\bullet =$$

gemeinsame Formel

$$(a+b) \cdot (a+2) = a^2 + 2a + 6a + 12 = a^2 + 8a + 12$$

b)\*\* Beispiele:

$$\bullet = ( \quad ) \cdot ( \quad ) = \quad + \quad + \quad + \quad =$$

$$\bullet =$$

$$\bullet =$$

gemeinsame Formel

$$( \quad ) \cdot ( \quad ) = \dots + 4a + a + \dots = a^2 + 5a + 4$$

5.\*\* Wie könnte das gehen?

Beispiele:

$$21 \cdot 31 = ( \quad ) \cdot ( \quad ) = \quad + \quad + \quad + \quad =$$

$$22 \cdot 32 =$$

$$23 \cdot 33 =$$

$$24 \cdot 34 =$$

gemeinsame Formel

$$( \quad ) \cdot ( \quad ) = \quad =$$

Notiere: In dieser Rechnung steht „a“ für .....

\* 6.\*\* Merkwürdig! Aber es geht. Wie? Rechne weiter.

\* Beispiele:

$$12 \cdot 14 = (5+7) \cdot (5+9) = \quad + \quad + \quad + \quad =$$

$$22 \cdot 24 = (15+7) \cdot ( \quad ) =$$

$$32 \cdot 34 = ( \quad ) \cdot ( \quad ) =$$

gemeinsame Formel

$$( \quad ) \cdot ( \quad ) = \dots \dots \dots =$$