Der Begriff der angewandten Mathematik aus pädagogischer Sicht

(am Beispiel der uneigentlichen Punkte in der Projektiven Geometrie)

von Frank Rothe

erschienen in:
„Erziehungskunst – Monatsschrift zur Pädagogik Rudolf Steiners“ ,
Januar 1997

Frank Rothe

Der Begriff der angewandten Mathematik aus pädagogischer Sicht

Ein neuer Anwendungsbegriff

Die Gegenstände der Mathematik, als rein geistig erzeugte Gebilde, sind zunächst unabhängig von aller Anwendung. Es ist aber eine Stütze des Menschenbewußtseins, daß diese Gedanken sich auf die äußere Wirklichkeit in mannigfacher Weise fruchtbar anwenden lassen. Daraus konnte sich der Begriff der »Angewandten Mathematik« entwickeln, in der Schule widergespiegelt in den sogenannten »Anwendungsaufgaben«. Für viele Situationen und für manche Schüler mögen sie eine besondere Motivation darstellen, die ihre Zuwendung zur Mathematik erhöht. Manchmal erleidet der Lehrer aber auch Schiffbruch, weil eine vermeintlich lebensnahe Anwendung bei den Schülern als nicht so nahe an *ihrem* Leben begriffen wird.

Darum sei der Begriff der »Anwendung« hier probehalber einmal in umgekehrter Richtung erweitert. Wir wollen die Sache pädagogisch sehen. Jeder Mensch, jeder Schüler insbesondere, ist in einem bestimmten Augenblick, in einem bestimmten Alter, zugänglich für bestimmte Fragen. Seine tieferen Probleme, die er oft gar nicht ausspricht, lassen sich dennoch abspüren. Dem Lehrer etwa einer Klasse, die in die Oberstufe hereinwächst, ist allemal die Aufgabe gestellt, diese »latenten Fragen« (Steiner) zu erlauschen. Ein Erkenntnisfeld im Unterricht an die Schüler heranzubringen, bedeutet im Bewußtsein dieser Lebensfragen, sich zu überlegen, ob es etwas beiträgt zur Lösung der tiefen Fragen der jungen Menschen. Wir können es eine »innere Anwendung« nennen, wenn wir ein Thema finden, das die Schüler im Kern so ergreift, daß jede Motivation durch »äußere Anwendungen« überflüssig wird.

Mit dem Begriff der inneren Anwendung ist nur in eine Wortprägung gebracht, was Rudolf Steiner zur Richtschnur seiner Lehrplanausführungen machte.[1] Im folgenden soll nun an einem geometrischen, weithin bekannten Beispiel dargestellt werden, auf welche Situation des Heranwachsenden es auftrifft und wie es klärend durchgeführt werden kann.

1 Vgl. etwa: »Erziehungsfragen im Reifealter« (in GA 302a), wo Steiner das Antworten auf die latenten Fragen zum Kern der Lehreraufgabe macht.

Ein Beispiel

Die Vorbereitung

Die allgemein-menschliche Entwicklung: Jugendliche im Alter von 15-16 Jahren entwickeln insbesondere die Fähigkeiten des rein logischen Denkens. Sie scheinen immerzu bemüht zu sein, ihren Intellekt zu schärfen und das logische Gefüge von Argumentationen zu untersuchen und zu hinterfragen. Natürlich geschieht dies im allgemeinen nicht in einer mathematischen Form, sondern in unzähligen Gesprächen und Diskussionen. Dabei kommt es ihnen oftmals nur darauf an, in einem Gedankengang eine Lücke zu finden, aufgrund derer selbstverständlich alles übrige in Frage gestellt wird – sehr oft zum Leidwesen der eigenen Eltern. Mit 17 Jahren erhalten diese gedanklichen Fähigkeiten noch eine besondere Färbung. In den Jugendlichen erwacht das Vermögen, Ideen zu erfassen, d. h. zwischen real vorhandenen Objekten und einer Idee, einem Gedanken, der hinter den Erscheinungen verborgen ist, zu unterscheiden. Die Fähigkeit, Ideen zu begreifen, ist *ein Aspekt* der allgemein-menschlichen Entwicklung. In bezug auf die Reife der gedanklichen Fähigkeiten ist sie die Disposition des Jugendlichen im Alter von 17 Jahren.

Die konkret-pädagogische Situation: Es gibt gerade heutzutage zahlreiche Informationen über die konkrete Situation, die Ansichten und Einstellungen der 17jährigen Jugendlichen. Man erfährt sie aus Zeitschriften und Büchern, durch die eigenen Kinder oder als Lehrer durch den Unterricht. Häufig bekommt man von den Jugendlichen zu hören: Ich glaube nur, was ich auch sehe! Hierin drückt sich eine auf die sinnliche Erscheinung beschränkte Einstellung zu Existenzfragen aus. Andererseits ist gerade in den letzten Jahren immer deutlicher geworden, wie die Jugendlichen auch auf der Suche nach etwas anderem sind. Das massivere Eindringen von Tische-Rücken, Gläser-Klirren u. ä. in die Schulen ist ein Hinweis auf diese Suche nach etwas, was nicht nur sinnlicher Natur ist, was vielmehr hinter den äußeren Erscheinungen liegt. Das bisher Geschilderte ist eine Zeiterscheinung und trifft daher auf viele Klassen zu. Weiterführende Betrachtungen, die z. B. eine ganz bestimmte Klasse betreffen, würden den vorgegebenen Rahmen sprengen.

Die Stoffwahl und erste didaktische Bemerkungen: Es gilt nun, die natürlichen vorhandenen Fähigkeiten und Interessen der Schüler in einen mathematischen Inhalt zu gießen. Im Anschluß an die bisherigen Überlegungen sollte sich dieser Inhalt auf etwas beziehen, das (zumindest aus Schülersicht) in der Grenzzone zwischen äußerer Erscheinung und nichtsinnlicher Natur, zwischen realen Objekten und dahinterliegenden Ideen anzusiedeln ist. Hier eignet sich – wie die Erfahrung in mehreren Klassen zeigt – der Begriff des uneigentlichen Punktes hervorragend.

Die uneigentlichen Punkte – zuweilen auch Fern- oder Grenzpunkte genannt – treten z.B. in der projektiven oder in der darstellenden Geometrie auf. Die Historie des uneigentlichen Punktes zeigt deutlich, wie sich die Menschheit um den Unendlichkeitsbegriff – die Frage nach dem wirklich oder potentiell Unendlichen – bemühte. Wer ein bißchen das Ringen um den unendlichen Punkt kennt, kann sich nicht des Eindrucks erwehren, als hätte sich der Mensch zeitweise in einer »Grenzzone« bewegt, um sie schließlich mit klaren Gedanken zu überwinden.

Üblicherweise werden die uneigentlichen Punkte heutzutage definitorisch als projektiver Abschluß eines affinen Raumes eingeführt. Was aber für die Mathematik in der Universität von großer Bedeutung ist, führt in der Schule oftmals zu tiefer Verunsicherung, was sich in der enttäuschten Schülerbemerkung ausdrückt: Das gibt es ja gar nicht! Selbst bei Studenten trifft man diese Unsicherheit zuweilen noch an. Aus diesem Grund legt es die nachstehende Einführung des uneigentlichen Punktes auf Grundlage der pädagogischen Überlegungen bewußt darauf an, die jungen Menschen in einen Grenzbereich zu versetzen, die Grauzone für den Schüler erlebbar werden zu lassen, um diese später wirklich zu überwinden bzw. selber gestärkt, in der eigenen Entwicklung gereift zu verlassen. Unter diesen Gesichtspunkten erscheint es gerechtfertigt und sinnvoll, vom mathematische Stoff als einer »Anwendung« auf die Innenwelt zu sprechen.

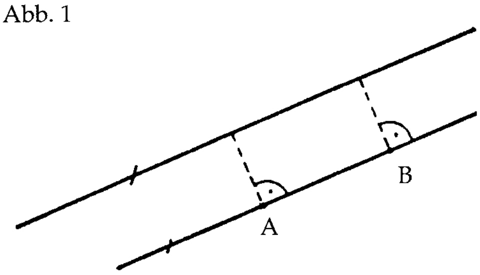
Vor der konkreten Durchführung sei noch auf eine nicht zu unterschätzende didaktische Formulierungsschwierigkeit in Zusammenhang mit den uneigentlichen Punkten hingewiesen. Die uneigentlichen Punkte sind bekanntermaßen eng mit dem Problem der parallelen Geraden verknüpft. Man sagt manchmal leichthin: »Zwei Parallelen schneiden sich im Unendlichen. Ihr Schnittpunkt heißt ›uneigentlicher Punkt‹!« Didaktisch gesehen ist diese Formulierung problematisch, da sie in den Schülern die Vorstellung erweckt, die Parallelen würden in der Unendlichkeit irgendwo im Weltall, ein paar Lichtjahre hinter der Sonne, tatsächlich aufeinander zulaufen und einen gewöhnlichen Schnittpunkt bilden. Jedoch besitzen die Parallelen nach dem bisherigen Wissen keinen gemeinsamen Schnittpunkt, und so muß die Formulierung beim Schüler zum Widerspruch führen.

Die Durchführung

Da die uneigentlichen Punkte im Zusammenhang mit den parallelen Geraden in Erscheinung treten, könnte man – um sich dem Problem zu nähern – zuerst sein Augenmerk auf die Parallelen richten. Welche Eigenschaften besitzen parallele Geraden? Parallelen schneiden sich nicht. Parallele Geraden haben alle eine gemeinsame Richtung.

Letzteres ist zu präzisieren, weil eine Gerade anschaulich betrachtet sowohl nach vorne wie nach hinten, somit in zwei entgegengesetzte »Richtungen« weist. Im Unterricht zeichnet man einen Punkt an die Tafel und bittet einen Schüler, mit dem Lineal eine Gerade genau in einer bestimmten Richtung durch den Punkt zu zeichnen. Offensichtlich handelt es sich ebenso um die gleiche Gerade, wenn man sie in genau der entgegengesetzten Richtung durch den Punkt gelegt hätte. Es ist festzuhalten: Eine Gerade wird durch eine Richtung eindeutig bestimmt, besitzt demnach auch nur eine eindeutige Richtung. Wie steht es aber mit den anschaulich entgegengesetzten Richtungen? Hier spricht man vom Durchlaufungssinn einer Geraden.[2] Ausgehend von einem Punkt, kann dieser auf zwei Weisen – »nach vorne oder nach hinten« – die Gerade durchlaufen. Jetzt bildet die eindeutige Richtung einer Geraden für die Schüler keine Schwierigkeit mehr.

Abb. 1



Wählt man auf einer ersten Geraden einen beliebigen Punkt, so gibt es zu einer parallelen Geraden einen kürzesten Abstand. Dieser ist konstant, gleich welche Punkte man auf der ersten Geraden auswählt. Man spricht von den Parallelen als Abstandslinien (Abb. 1).

Zusammenfassend kann man von drei Eigenschaften der parallelen Geraden sprechen: als Abstandslinie, als Geraden mit gleicher Richtung und als sich nicht schneidende Geraden.

Spätestens jetzt sollten Konstruktionsaufgaben durchgeführt werden, bei denen die Schüler implizit-unbewußt mit den uneigentlichen Punkten umgehen. Hier eignet sich in der projektiven Geometrie beispielsweise die Konstruktion von Paaren sich entsprechender (d. h. »gegenüberliegender«) Punkte zweier perspektiver Punktreihen.

Sind die Punktreihen $g(A_1, B_1)$ und $g(A_2, B_2)$ perspektiv, so reichen zwei Paare entsprechender Punkte, nämlich A_1, A_2 und B_1, B_2, aus, um das Perspektivitätszentrum Z zu konstruieren. Für die Konstruktion eines neuen Paares muß man nur einen Punkt C_1 wählen und diesen mit Z verbinden. Der Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der zweiten Punktreihe ist der entsprechende Punkt C_2. Man ist versucht zu formulieren: In der Zeichnung besitzt Z die Aufgabe, zu einem Punkt dessen entsprechenden zu konstruieren (Abb. 2, s. S. 18). Wie aber ist die Sachlage, wenn die Verbindungslinen $g(A_1, A_2)$ und $g(B_1, B_2)$ sich nicht schneiden, sondern parallel sind? In diesem Fall kann man kein Perspektivitätszentrum Z zeichnen. Gibt es trotzdem ei-

2 Vgl. L. Locher-Ernst: Raum und Gegenraum, Dornach 1970, S. 18.

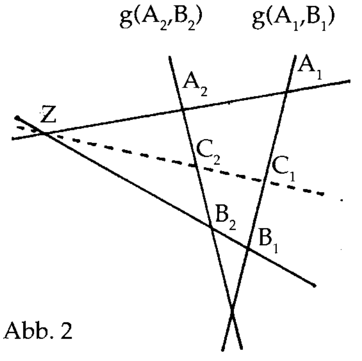


Abb. 2

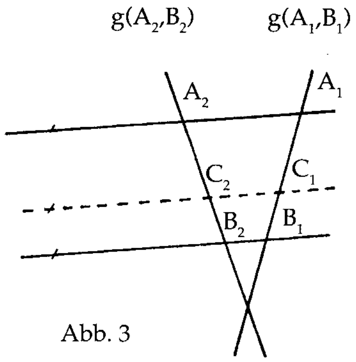


Abb. 3

nes? Möchte man zu einem weiteren Punkt C_1 den entsprechenden konstruieren, so zeichnet man eine Parallele zu den beiden ersten Geraden durch C_1. Deren Schnittpunkt mit der Punktreihe $g(A_2, B_2)$ ist der entsprechende Punkt C_2. Auf diese Konstruktionsmöglichkeit kommen die Schüler schnell. Doch ist hier etwas Merkwürdiges geschehen. Zuerst war es die Aufgabe des Punktes Z, entsprechende Punkte zu konstruieren. In der zweiten Zeichnung ist dies auf einmal auch »ohne Z« möglich. Es ist, »als ob Z da wäre«. Was hat denn in der zweiten Zeichnung die Aufgabe von Z übernommen? Dies ist doch offensichtlich die Richtung der parallelen Verbindungslinien. Man kann als Zwischenergebnis festhalten: Die Aufgabe eines Punktes Z wurde von der Richtung der Parallelen übernommen.

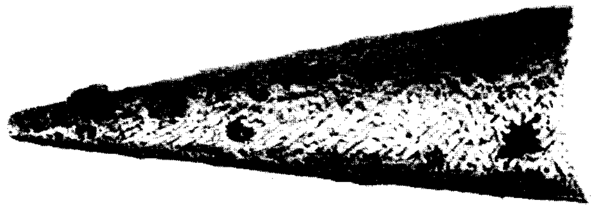
Solche oder ähnliche Konstruktionen brauchen zwar Zeit, sind aber nicht wertlos. Trägt man unmittelbar die Kunde von den uneigentlichen Punkten nur auf intellektuell-verstandesmäßige Weise an die Schüler heran, dann entsteht oft die eingangs erwähnte Verunsicherung. Aus der Sinneslehre[3] kennt man die Tatsache, daß die Betätigung von Tast-, Eigenbewegungs- und Gleichgewichtssinn im Umgang mit bestimmten Dingen oder Inhalten ein gewisses Gefühl für die Wirklichkeit, die Existenz der Dinge vermittelt. So entsteht in dieser frühen praktischen Konstruktionsphase eine »Realitätsgrundlage« für die späteren theoretischen Überlegungen. Fehlt erstere, so ist die Gefahr des Abgehobenseins, der Unwirklichkeit der theoretischen Überlegungen sowie die Gefahr der Verunsicherung der Schüler größer.

Zurück zu den Parallelen. Wie spielen Punkt und Richtung ineinander? Sind Punkte doch nicht so wichtig, wie man üblicherweise meint? Ist es der Kreidefleck an der Tafel? Wenn man diesen mit einem Mikroskop vergrößert, zeigt er sich deutlich als Fläche und nicht als Punkt. Existieren überhaupt Punkte unter diesem Gesichtspunkt? Diese Frage stellte sich im 17. Jahrhun-

3 Vgl. Willi Aeppli: Sinnesorganismus, Sinnesverlust, Sinnespflege. Stuttgart 1996 (Neuaufl.).

dert auch Robert Hooke. Er kam zu dem Schluß, daß dem Begriff des Punktes oder allgemeiner den menschlichen Begriffen keine Wirklichkeit entspreche (Abb. 4). Hat er hiermit recht, oder was verbirgt sich hinter dem Wort »Punkt«?

Abb. 4:
R. Hookes »Beweis« der Unwirklichkeit der menschlichen Begriffe. Anblick einer Nadel



Diesem Problem kann man sich nähern, indem man fragt, wo in der Alltagssprache das Wort »Punkt« eigentlich auftritt ... Bezugspunkt, punktweise, Schnittpunkt, Mittelpunkt, etwas auf den Punkt bringen, Zeitpunkt, Berührungspunkt, Treffpunkt, Standpunkt usw. Man greift aus all diesen Beispielen die mathematisch-geometrischen heraus und untersucht sie auf die drei Fragen hin:

Was ist ein Punkt?
Welche Aufgaben in einer Zeichnung kann ein Punkt übernehmen?
Welche Zeichen, Symbole für den Punkt gibt es?

Leicht läßt sich herausarbeiten, daß die genannten Beispiele wie Schnittpunkt, Berührpunkt, Mittelpunkt etc. eher eine Aufgabe, eine Funktion beschreiben als das Wesen des Punktes. Zu speziellen Aufgaben eines Punktes haben die Menschen bestimmte Zeichen erfunden, z. B. für den Schnittpunkt »⨯«. Andere Zeichen für Punkte sind ».« , »o«. Bemerkenswert ist das letzte Zeichen. Hier meint man natürlich nicht den kleinen Kreis selber, sondern dessen Mittelpunkt, den man sich jedoch vorstellen, in den Kreis hineindenken muß. Was aber ist der Punkt? Das Wort Punkt wird oft synonym für Sammlung oder Konzentration gebraucht. Ein Punkt drückt unter anderem das Gemeinsame von verschiedenen Dingen aus. Euklid sagte: »Ein Punkt ist dasjenige, was keinen Teil besitzt.« Interessant ist die überlieferte Äußerung von Aristoteles, ein Punkt sei dasjenige, was keine räumliche Ausdehnung besitze. Wenn etwas keine räumliche Ausdehnung aufweist, ist es für den Menschen nicht sichtbar. Der Punkt ist wie alle geometrischen Gebilde ein reiner Begriff, eine Idee und als solcher dem menschlichen Auge nicht unmittelbar zugänglich. Was man gemeinhin für den Punkt hält, ist lediglich sein Zeichen, sein Symbol, dessen man sich bedienen muß, wenn man mit dem Punkt konstruktiv umgehen möchte. Der Kreidefleck an der Tafel ist nur eine sehr unvollkommene – wenngleich doch nötige – sinnliche Krücke für den Menschen.

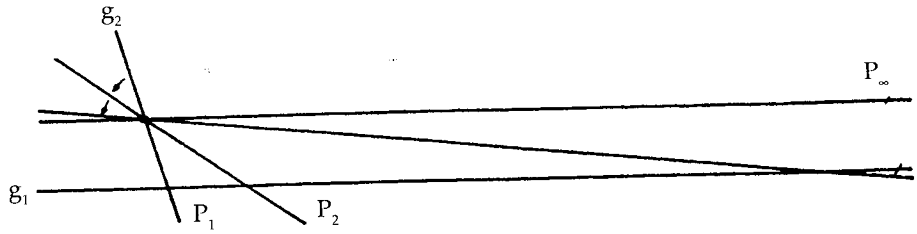
Offenbar kann es bei einem Punkt gar nicht darum gehen, ihn zu sehen. Was aber macht den Punkt letztlich aus? *Von dem nun erarbeiteten höheren Gesichtspunkt aus läßt sich sagen: Ein Punkt ist dadurch charakterisiert, daß er das Gemeinsame von anderen Dingen, insbesondere von Geraden bezeichnet und vor allem eine Aufgabe wahrnimmt.*[4] Speziell für unsere perspektiven Punktreihen (Abb. 2) hieße dies: Einerseits ist Z als Schnittpunkt das Gemeinsame aller Verbindungslinien sich entsprechender Punkte, andererseits liegt seine Aufgabe in der Konstruktion entsprechender Punkte. Insbesondere für die Abb. 3 müßte man entsprechend formulieren: Einerseits ist die Richtung der Parallelen das Gemeinsame aller Verbindungsgeraden sich entsprechender Punkte, andererseits liegt die Aufgabe der Richtung in der Konstruktion entsprechender Punkte. Da auch hier die wesentlichen Charakteristiken eines Punktes zutreffen, darf man mit einer gewissen Berechtigung von einem Punkt in dem obigen Sinne sprechen. Doch sind sie von den eigentlichen – den bekannten gewöhnlichen – Punkten in bezug auf die Anschauung so verschieden, daß man ihnen den Namen »uneigentliche Punkte« gab.

Ebenso wie sich die gewöhnlichen Punkte nach ihrer Funktion, die sie in der Zeichnung innehaben, differenzieren lassen, kann man Entsprechendes bei den uneigentlichen Punkten versuchen. Hierdurch werden sie vertiefend charakterisiert. Der Schnittpunkt besitzt die Aufgabe, den Schnitt oder genauer den Ort, wo sich die Geraden schneiden, anzugeben. Der Mittelpunkt hat die Funktion, den Ort der Mitte, das Zentrum zu bezeichnen. Es kommt dem uneigentlichen Punkt zu, die Richtung der Geraden aufzuzeigen. Ebenso, wie man bei den eigentlichen Punkten vom Schnitt-punkt bzw. vom Mittel-punkt spricht, müßte man bei den uneigentlichen Punkten von Richtungs-punkten reden. Jetzt wird auch deutlich, warum die uneigentlichen Punkte oder die Richtungspunkte etwas zunächst sehr Merkwürdiges darstellen. Die gewöhnlichen Punkte markieren immer einen gemeinten Ort, den Schnitt oder die Mitte. Sie besitzen, anschaulich gesprochen, Ortscharakter, sind Ortspunkte. Bei den uneigentlichen Punkten ist das Wesentliche eben nicht mehr ein Ort, sondern eine Richtung. Sie besitzen Richtungscharakter, sind Richtungspunkte. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zwischen den gewöhnlichen oder eigentlichen und den uneigentlichen Punkten. Nur kommen die eigentlichen Punkte mit ihrem Ortscharakter der menschlichen Anschauung mehr entgegen.

Hier wird auch die Wortwahl »eigentlicher« und »uneigentlicher« Punkt deutlich. Was so ein richtiger Punkt ist, bestimmt auch »eigentlich« einen (geometrischen) Ort. Genau das tut aber ein Richtungspunkt nicht. Das »eigentlich« bezieht sich auf den Ortscharakter. Daher ist der Richtungspunkt nur ein »un-eigentlicher« Punkt.

4 Wie Anm. 2.

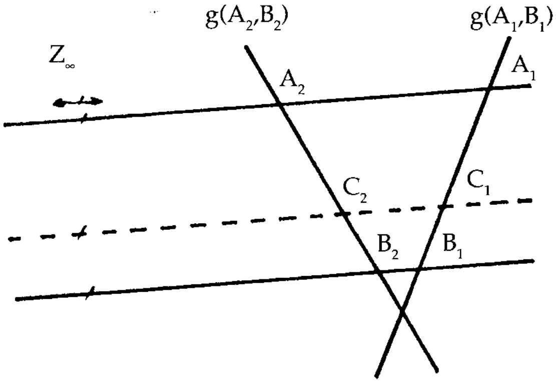
Abb. 5



Wir haben gesagt: Das Gemeinsame zweier Geraden nennen wir Punkt. Es kann einmal als Schnittpunkt oder als Richtungspunkt in Erscheinung treten. Wie hier der Punkt als das Gemeinsame zweier Geraden zwischen Ort und Richtung hin und her spielt, wird in der folgenden Abbildung (Abb. 5) besonders deutlich.

Es sind die beiden Geraden g_1 und g_2 gegeben. Dreht man nun g_2 um einen festen Punkt, so erhält man verschiedene Punkte, die das Gemeinsame beider Geraden darstellen. Die Punkte P_1 und P_2 sind richtig schöne, brave Schnittpunkte mit einem klar zu erkennenden Ort. Sind g_1 und g_2 parallel, so ist das Gemeinsame der Richtungspunkt P_∞. P_∞ hat reinen Richtungscharakter; vom Ortscharakter der früheren Punkte beider Geraden ist nichts mehr übriggeblieben. Für die Anschauung nimmt jedoch ein Punkt wie P_3 eine Sonderstellung ein. Während die Schnittwinkel der beiden Geraden bei den Schnittpunkten P_1 und P_2 recht groß waren, ist er bei P_3 so klein geworden, daß es im Rahmen der Konstruktion für die Anschauung schwierig wird, den genauen Ort des Schnittes zu bestimmen. In der Zeichnung entsteht der Eindruck, als würde der Punkt allmählich seinen Ort, seinen Ortscharakter verlieren, während die beiden Geraden »immer paralleler« werden, d. h. zusehends mehr Richtungscharakter annehmen.

Selbstverständlich ist dieses Bild durch die Anschauung geprägt. Letztlich sind alle Punkte bei der Drehung von g_2 Schnittpunkte, und nur in der einen Sonderstellung von g_2 liegt ein Richtungspunkt vor. Sein Erscheinen ist, rein mathematisch betrachtet, wie ein plötzlicher Sprung von den bisherigen Ortspunkten zum Richtungspunkt. Und doch ist das Bild für manche Schüler eine wahre Hilfe. Zunächst ist der (gemeinsame) Punkt von g_1 und g_2 ein Schnittpunkt. Durch die Drehung – für die Anschauung bereits während der Drehung – verwandelt er seine Erscheinung und wird zum Richtungspunkt. Erscheint der Punkt zuerst als Ort, so wird er dann zur Richtung – bei vollständigem Verzicht auf den bisherigen Ortscharakter, die bisherige Erscheinung. Und doch gibt es etwas, das die beiden sehr verschiednen Erscheinungen des Ortes und der Richtung gleichermaßen verbindet, beide Erscheinungen wie »durchzieht«. Das ist der Punkt! So ist der Richtungspunkt nicht nur eine isolierte Kuriosität, sondern durch die Verwandlung[5] der Erscheinung in das bisherige Wissen des Schülers (von den eigentlichen Punkten) eingebettet.



In Abb. 5 wurde bereits das Zeichen für den Richtungspunkt benutzt. Ebenso wie der Mensch ein Zeichen für den Schnittpunkt erfinden mußte, um mit diesem konstruktiv umgehen zu können, mußte er das gleiche auch für die Richtungspunkte tun. Als neues Symbol nimmt man den Namen (Buchstaben) des Punktes mit einer Lemniskate, z. B. »Z«. Zuweilen nimmt man der Deutlichkeit halber auch noch einen Doppelpfeil »$\leftrightarrow$« hinzu und schreibt beides an die Geraden mit der entsprechenden Richtung. Übernähme man z. B. einfach das Zeichen »$\not{-}$« des gewöhnlichen Schnittpunktes, so wäre man immer verleitet, ein Zusammenlaufen der Parallelen unbewußt in die Zeichnung hineinzulegen. Das Zeichen »$\not{-}$« besitzt eben für den heutigen Menschen eine stark anschauliche Komponente. Zu guter Letzt wäre noch die Abb. 3 zu vervollständigen.

Was man bis hierher getan hat, ist, nach dem »Punkt« in der Alltagssprache zu forschen und die eher mathematisch-geometrischen Beispiele auf die genannten drei Fragen hin zu untersuchen. So arbeitet man heraus, daß es für die Existenz eines Punktes im wesentlichen nicht auf dessen Sichtbarkeit ankommt. Man bedient sich bloß gewisser Zeichen, um mit ihnen konstruktiv zu Rande zu kommen. Im letzten Abschnitt schält man die beiden charakteristischen Eigenschaften des Punktes, das Gemeinsame von anderen Dingen auszudrücken und eine Aufgabe zu erfüllen, heraus. An dieser Stelle hat man den ursprünglichen Begriff des Punktes – meist als Schnittpunkt gedacht – erweitert. Zu den Punkten mit Ortscharakter sind jene Punkte mit Richtungscharakter hinzugekommen, was in der folgenden Tabelle zusammengefaßt wird.

5 Zum Begriff der Verwandlung bzw. der Metamorphosen vgl. E. Lehrs: Mensch und Materie. Vittorio Klostermann, Frankfurt/M. 1987, S. 61 - 83. Vom gleichen Autor für uns wichtig: Vom Geist der Sinne. Vittorio Klostermann, Frankfurt/M. 1982.

Wesen	Aufgabe	Zeichen	Charakterisierung
... dasjenige, was keinen Teil besitzt! ... hat keine räumliche Ausdehnung! ... das Gemeinsame von zwei Geraden (Dingen)!	Schnitt-punkt Mittel-punkt etc.	z.B.	bestimmen einen Ort, Ortscharakter, Ortspunkt (eigentlicher Punkt)
	Richtungs-punkt	Z_{∞} $\leftrightarrow$	bestimmen eine Richtung, Richtungscharakter, Richtungspunkt (uneigentlicher Punkt)

Von diesem erhöhten Standpunkt aus kann man auf die beiden anfangs betrachteten Zeichnungen eingehen.

Erweiterung des Anwendungsbegriffes

Wie hängen nun die Begriffe der äußeren und der inneren Anwendung zusammen? Einen Hinweis auf die Beantwortung der Frage erhält man, wenn man versucht, eine geeignete innere Anwendung für 15- bis 16jährige Schüler zu finden. In ihrer allgemein-menschlichen Entwicklung sind sie an dem Punkt, an dem sie die Gedanken auf ihre logischen Zusammenhänge untersuchen. Gibt es Lücken in der Argumentation, oder ist der Gedankengang logisch in sich geschlossen? In gewisser Hinsicht ist dies ein mechanisch-technischer Aspekt des Denkens, wenn man diesen z.B. mit der Rolle der Phantasie innerhalb der Denkens vergleicht. Funktioniert der Gedankengang reibungslos? Das ist das Wesentliche. Man kann beobachten, wie sich gerade 16jährige bei Fragen der Rechengenauigkeit, Rundungsfehlern, Meßgenauigkeit usw. angesprochen fühlen. Die mathematischen Themen, die hierzu passen, sind aber gerade die herkömmlichen bzw. äußeren Anwendungen aus der Technik und der Physik. Der Begriff der inneren Anwendung umfaßt die äußeren Anwendungen, die als ein Bestandteil in ihm enthalten sind. Mit »anwenden« ist hier zunächst nicht ein Anwenden des mathematischen Stoffes z. B. auf ein Problem der Physik gemeint, sondern die unmittelbare Beziehung zwischen mathematischen Inhalten und Schüler. Diese Beziehung, die Frage nach der Anwendbarkeit für den Schüler, orientiert sich dabei an der allgmeinmenschlichen Entwicklung und der konkret-pädagogischen Situation. Die inneren Anwendungen erscheinen als Erweiterung des herkömmlichen Anwendungsbegriffes aus pädagogischer Sicht.

Die neue Sichtweise des Anwendungsbegriffes als innere Anwendung vergrößert den Rahmen dessen, was im Unterricht möglich ist, erheblich. Die Auswahl des Stoffes wird reichhaltiger und abwechslungsreicher. Man darf hoffen, durch diese Methode der Stoffwahl viele Schüler anzusprechen. Dabei muß man auch nicht die Befürchtung hegen, durch vorgegebene Lehrpläne zu sehr eingeschränkt zu sein. Läßt man sich auf den Begriff der inneren Anwendung bei der Vorbereitung ein, so wird man überrascht sein, wieviel Übereinstimmungen mit den Lehrplänen bestehen. In einem solchen Fall war die viele Arbeit aber ganz und gar nicht umsonst. Der Lehrer hat nun ganz andere Grundlagen und Gesichtspunkte, aus denen heraus er unterrichtet.

Es soll an dieser Stelle noch eine Mahnung ausgesprochen werden. Natürlich kann es nicht darum gehen, jede Unterrichtsstunde in der Art einer inneren Anwendung zu gestalten. Dies erwarten die Schüler aber auch gar nicht. Findet man *eine* interessante innere Anwendung als Einführung in ein neues Thema, so reicht dies oft schon für den gesamten Themenbereich aus, da die Schüler im weiteren Verlauf mit den aufgeworfenen Fragen und den neuen Denkweisen praktisch umgehen.

Den Abschluß der gemachten Überlegungen soll eine Ermutigung bilden. Vielleicht wird manch einer den Eindruck eines ungeheuren Arbeitsaufwandes für die inneren Anwendungen bekommen haben. Sicherlich ist es mehr Arbeit, als wenn man ausschließlich nach einem Buch vorgeht. Hier muß jeder seine eigenen, auch zeitlichen Möglichkeiten erkennen und dementsprechend handeln. Vielleicht wird man im ersten Jahr nur *eine* innere Anwendung für sich selber herausarbeiten. Diese wird man in den folgenden Jahren ausfeilen. Dann nimmt man sich nach eigenen Möglichkeiten einen neuen Bereich vor. Die Beschäftigung mit dem Entwicklungsstand der Schüler schafft zudem eine völlig andere Grundlage in der Lehrer-Schüler-Beziehung. Je nachdem, wie intensiv man sich damit auseinandersetzt, kann man den Eindruck bekommen, daß der Stoff selber das Mittel zur Erziehung der jungen Menschen ist. Und dies, ohne einen Abstrich an mathematischen Inhalten machen zu müssen, denn bei dieser Art des Unterrichts gilt ja gerade: Je besser der Schüler den Stoff beherrscht, desto mehr entwickelt er die Fähigkeiten, die in der allgemein-menschlichen Entwicklung und seiner Persönlichkeit im Augenblick zur Disposition stehen. Ein hoher Anspruch an den Lehrer? Diese Frage beantworte ein jeder sich selber. Wie man dem Anspruch gerecht wird? Ein jeder nach seinen Möglichkeiten. Und gerade auf diesem Gebiet gilt: »Wer sich wirklich bemüht, wird weiterkommen.«

Der Autor unterrichtet Mathematik und Physik an der Oberstufe der Rudolf-Steiner-Schule Salzburg.