Polarisieren ebener Kurven

von Frank Rothe

erschienen in:
Mathematisch – Physikalische Korrespondenz, 175/94, S. 25 - 28

Polarisieren ebener Kurven

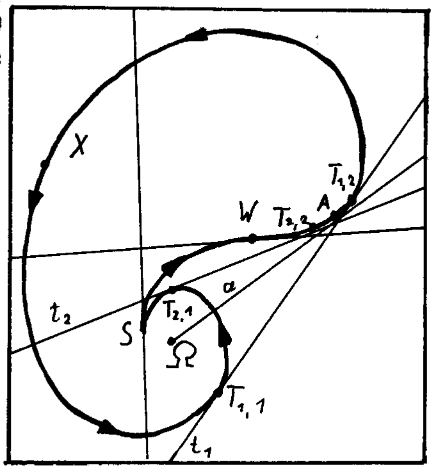
I. Einleitung

Ein sehr reizvolles Teilgebiet der projektiven Geometrie ist die Morphologie ebener Kurven. Hier werden Kurven auf ihre Gestalt hin betrachtet. Der Gestalt einer Kurve nähert man sich z.B. durch folgende Untersuchungspunkte: Singularitäten, Charakteristik(der Punktgebiete und ggf. der Strahlen-bereiche), Klasse der Kurve, Ordnung der Kurve, Polarform der Kurve. Die Polarform einer Kurve erhält man durch konsequentes Vertauschen der Begriffe "Punkt der Kurve" und "Tangente der Kurve unter Berücksichtigung der Durchlaufungsrichtung eines Punktes bzw. des Drehsinnes einer Tangente. Man unterscheidet das freie und das konstruktive Polarisieren. Während man bei der ersten Art die Polarform "unmittelbar" durch geeignete Überlegungen erhält, findet man die polare Kurvenform bei der zweiten Art konstruktiv mit Hilfe der Polarentheorie (zumeist auf den Kreis bezogen). Beginnt man Kurven frei zu polarisieren, wird man bald merken, daß sich einige Kurven nicht ohne weiteres polarisieren lassen. Dies kann sich beispielsweise darin ausdrücken, daß - obwohl bei einer geschlossenen Kurve Anfangs- und Endtangente (als reguläres Linienelement) identisch sind - dennoch die Tangente zu Beginn einen anderen Drehsinn aufweist als am Ende. Der Grund hierfür liegt in den Eigenschaften der projektiven Ebene als solcher [1, S. 162]und in den Punktgebieten der entsprechenden Kurve. Denn "wenn von allen Punkten der Ebene Tangenten an die Kurve gelegt werden können, so heißt das für die Gegenkurve, daß alle Geraden der Ebene die Kurve schneiden, insbesondere auch die unendlich ferne Gerade."[3, S.120] Die Polarform besitzt somit uneigentliche Kurvenpunkte. Deren genaue Anzahl läßt sich an dem niedrigsten Punktgebiet der zu polarisierenden Kurve ablesen.

Ziel dieser kleinen Notiz sei nun die Zusammenstellung "geeigneter" Überlegungen und Fragen, um auch bei solchen etwas schwierigeren Polarisationsaufgaben frei vorgehen zu können. Hierzu ist es zweckdienlich die Kurve immer zugleich aus Punkten und Tangenten bestehend d.h. zusammen als Linienelemente zu betrachten.

II. Beispiel für das freie Polarisieren einer ebenen Kurve:

1. Welche Singularitäten (eigentliche und uneigentliche) besitzt die Kurve? Polarisiere die Singularitäten.



Im Beispiel enthält die Kurve genau eine Schnabelspitze S, eine Wendestelle W und zwei Doppeltangenten t_1 und t_2 mit den jeweiligen Berührpunkten $T_{1,1}$ $T_{1,2}$ und $T_{2,1}$, $T_{2,2}$.

Schnabelspitze S $\longleftrightarrow$ Schnabelspitze S

Wendestelle W $\longleftrightarrow$ Dornspitze D

Doppeltangente t_1 $\longleftrightarrow$ Doppelpunkt P_1

Doppeltangente t_2 $\longleftrightarrow$ Doppelpunkt P_2

2. Wieviele uneigentliche Kurvenpunkte muß die polarisierte Kurve mindestens enthalten(s. niedrigstes Punktgebiet)?

In dem Beispiel ist das niedrigste Punktgebiet ein 1* Gebiet.

3. Lege den Punkt Ω, der beim Polarisieren zur uneigentlichen Geraden ω werden soll (beliebig), fest.

Je weniger uneigentliche Punkte die Kurve enthält, umso einfacher wird in der Regel der Polarisationsvorgang. Daher legt man Ω am besten an einer übersichtlichen Stelle in das niedrigste Punkgebiet. In dem Beispiel geht von Ω aus die Tangente a an die Kurve. Die Tangente berührt im Punkt A.

4. Durchlaufe die Kurve von einem allgemeinen Kurvenpunkt ausgehend und behalte die Reihenfolge der durchlaufenen besonderen Kurvenpunkte. Polarisiere diese Reihenfolge unter Beachtung des Linienelementaspektes.

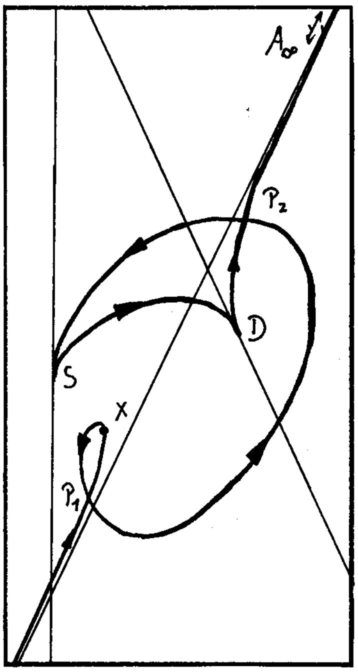
Im Beispiel startet man moglicherweise von X aus gegen den Uhrzeigersinn. Auf diesem Weg kommt man der Reihe nach durch die Punkte $T_{1,1}$, $T_{2,1}$, S, W, $T_{2,2}$, A, $T_{1,2}$ und wieder zu X. Beim Polarisieren dieser Reihenfolge von Linienelementen ergibt sich:

$X \to T_{1,1} \to T_{2,1} \to S \to W \to T_{2,2} \to A \to T_{1,2} \to X \quad \longleftrightarrow \quad X \to P_1 \to P_2 \to S \to D \to P_2 \to A_\infty \to P_1 \to X$

In der Praxis wird viel davon abhängen, wie genau man die ursprüngliche Kurve gezeichnet und ein Gefühl, einen Blick für Lage und Reihenfolge der Singularitäten entwickelt hat.

5. Versuche die Polarform zu zeichnen.

Einige Tips beim zeichnen: Beachte dabei ggf. vorgegebene Symmetrien der ursprünglichen Kurve sowie die beiden möglichen Formen eines Doppelpunkte(entweder oder). Eine Schnabelspitze besitzt eine oberen und einen unteren Zweig. Vorsicht! Es dürfen keine ungewollten Doppeltangeten entstehen. Vor diesen kann man versuchen sich zu schützen, indem man gleichzeitig die Tangenten der eigentlichen Singularitäten miteinzeichnet. Manchmal fällt es leichter die Kurve zu zeichnen, wenn man an einer anderen Stelle in der Reihenfolge z.B. vor einer Singularität beginnt.



III. Schlußbemerkung

Was leistet dieses Schema zum freien Polarisieren von ebenen Kurven? Es ermöglicht auch schwerere Kurven frei zu polarisieren. Dies ist insofern von Interesse, da das freie Polarisieren immer eine Note des Knobelns beinhaltet sowie die geometrische Anschauung fördert und beweglich macht. Dem gegenüber erscheint die konstruktive Polarisation eher wie ein Handwerk. Jedoch vermag diese gleichzeitig die Punktgebiete und Strahlenbereiche einer Kurve exakt zu polarisieren. Das ist beim freien Polarisieren nicht unmittelbar gegegen. Hier liegt das Hauptaugenmerk mehr auf dem Kurvenverlauf selber. Für den Unterricht mag das Schema insofern von Interesse sein, daß, wenn man nur wenig Zeit zur Verfügung hat, man die verschiedenen Pol-Polaren-Konstruktionen und den Hauptsatz der Polarentheorie nicht in der ganzen Klasse besprechen muß(ggf Zusatzstoff für die Schnelleren). Als Übungsmaterial sei auf [3, S. 119 ff] verwiesen.

IV. Literatur

[1] Brieskorn,E. ,"Ebene Algebraische Kurven", Verlag Birkhäuser, Stuttgart, 1981

[2] Locher-Ernst,L. ,"Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven", Verlag Birkhäuser, Basel, 1952

[3] Rovida,A. ,"Übungen zur synthetischen projektiven Geometrie", Phil.-Anthro. Verlag am Goetheanum, Dornach, 1988